Никитин: Девочка, которая пришла в магистратуре на спецкурс в 9-м семестре в сентябре, сказала, что к ней нужно особое отношение, и ушла. Вот что я должен ей поставить?
Студенты: Отл, показав ей особое отношение! А вдруг она придёт в январе (на экзамен) и всех разнесёт?
Никитин: Не думаю. Она с трудом закончила (в бакалавриате) кафедру водки (именно так), моря и суши…

Начнём с ПОЛНОГО решения одного процесса - пион-пионного рассеяния. А почему именно с него? Да потому что участвуют только пионы – частицы без спина и со скалярным полем. Это значительно упрощает все выкладки. Увы, если в реакции есть хоть одна частица с ненулевым спином (лептон, фотон), то упрощения не будет.

Разумеется, читатель с первого раза едва ли поймёт все нюансы – но гораздо важнее, чтобы он уловил общую схему решения, принципы.

Задача:

в теории нейтральных скалярных пионов с гамильтонианом взаимодействия $\mathcal{H}^{int}(x) = -g\,\pi^3(x)/3!$ вычислить сечение рассеяния пиона на пионе в низшем порядке теории возмущений. Пионы считать точечными частицами.

Любая задача разбивается на две: подсчёт М-матричного элемента M_{fi} (о нём позже) и подсчёт сечения через М-матричный элемент M_{fi}.

Шаг 1: подсчёт М-матричного элемента M_{fi}

Пионное поле является скалярным, т.е. записывается очень легко, без всяких спиноров:

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\iiint d^4\boldsymbol{k}\,\frac{\widehat{c_{\boldsymbol{k}}^{+}}e^{i\boldsymbol{kx}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k}}}e^{-i\boldsymbol{kx}}}{\sqrt{2E_k}}$$

$\boldsymbol{x}$ – это 4-радиус-вектор точки в 4-пространстве времени. Т.е. формула выше определяет пионное поле в любой точке пространства-времени.
$\pi(\boldsymbol{x})$ не имеет никакого отношения к числу π. Просто т.к. поле пионное, его принято обозначать как $\pi(\boldsymbol{x})$. Лептонное поле часто обозначают как $l(\boldsymbol{x})$, например.

Сразу выскажусь насчёт множителя $\sqrt{2E_k}$. Это, как сказал Никитин, артефакт квантования э/м поля, не имеющий физсмысла. Более того, он будет нам только мешать. Мы сделаем так: я его сначала уберу, потом верну, а потом снова уберу ☺ По ходу дела будет понятно. Итак, сперва мы его уберём:

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\iiint d^4\boldsymbol{k}\left(\widehat{c_{\boldsymbol{k}}^{+}}e^{i\boldsymbol{kx}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k}}}e^{-i\boldsymbol{kx}}\right)$$

Вот такое вот пионное поле! Естественно, выводить его мы не будем. Но заметим, что что-то подобное мы уже видели – это же электромагнитное поле!

$$4-\text{потенциал } \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \text{какой} - \text{то коэф, который никто не помнит} * \int\iiint d^4\boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{c_k} e^{i\boldsymbol{kx}} + \boldsymbol{c_k} e^{-i\boldsymbol{kx}}\right)$$

Свободное поле можно разложить по синусоидальным электромагнитным волнам. 4-потенциал в любой точке пространстве времени

Посмотрим ещё раз на гамильтониан:

$$\widehat{H}(\boldsymbol{x}) = -\frac{g}{3!}\pi^3(\boldsymbol{x})$$

Т.е. в каждой точке пространства времени определен гамильтониан, причём чем больше пионное поле (точнее, его куб), чем сильнее гамильтониан (взаимодействие).

Надо вычислить куб пионного поля!

$$\pi^3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^9}\int\iiint d^4\boldsymbol{k_1}\left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}^{+}} e^{i\boldsymbol{k_1x}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}} e^{i\boldsymbol{k_1x}}\right) * \left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}^{+}} e^{i\boldsymbol{k_1x}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}} e^{i\boldsymbol{k_1x}}\right) \int\iiint d^4\boldsymbol{k_2}\left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}^{+}} e^{i\boldsymbol{k_2x}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}} e^{i\boldsymbol{k_2x}}\right) \int\iiint d^4\boldsymbol{k_3}\left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}^{+}} e^{i\boldsymbol{k_3x}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}} e^{i\boldsymbol{k_3x}}\right)$$

Это можно расписать как двенадцатиричный интеграл:

$$\pi^3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^9}\int\iiint d^4\boldsymbol{k_1}\int\iiint d^4\boldsymbol{k_2}\int\iiint d^4\boldsymbol{k_3} * \left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}^{+}} e^{i\boldsymbol{k_1x}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}} e^{i\boldsymbol{k_1x}}\right)\left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}^{+}} e^{i\boldsymbol{k_2x}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}} e^{i\boldsymbol{k_2x}}\right)\left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}^{+}} e^{i\boldsymbol{k_3x}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}} e^{i\boldsymbol{k_3x}}\right)$$

Выглядит страшно, но ~~не~~ стоит отчаиваться! Мысленно раскроем скобки – вылезет восемь слагаемых.

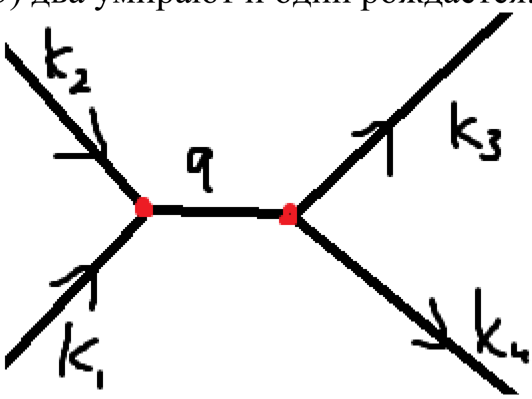
1) $\widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}^{+}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}^{+}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}^{+}}*\ldots$

2) $\left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}^{+}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}^{+}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}^{+}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}^{+}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}^{+}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}^{+}}\right) * \ldots$

3) $\left(\widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}^{+}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}^{+}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}} + \widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}^{+}}\right) * \ldots$

4) $\widehat{c_{\boldsymbol{k_1}}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_2}}}\widehat{c_{\boldsymbol{k_3}}}*\ldots$

1) и 4) выкинем сразу. А вот 2) и 3) должны нас натолкнуть на мысль, какой должна быть диаграмма Фейнмана. В 2) два пиона рождается и один вымирает, в 3) два умирают и один рождается. Прикинем диаграмму Фейнмана:



4-импульс промежуточной частицы, как правило, обозначают как **q**.

Теперь теорема Вика. По ней S-оператор можно разложить в ряд:

$$S^{(1)} = -i\int\iiint d^4\boldsymbol{x}\widehat{H}(\boldsymbol{x})$$

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!}\int\iiint d^4\boldsymbol{x_1}\int\iiint d^4\boldsymbol{x_2}\,T\left(\widehat{H}(\boldsymbol{x_1}) * \widehat{H}(\boldsymbol{x_2})\right)$$

$$= -\frac{(-i)^2 g^2}{2!\,3!\,3!}\int\iiint d^4\boldsymbol{x_1}\int\iiint d^4\boldsymbol{x_2}\,T\left(\pi^3(\boldsymbol{x_1}) * \pi^3(\boldsymbol{x_2})\right)$$

Где T – хронологическое произведение операторов. Как сложно! Как счастью, нам от теоремы Вика всё, что нужно понять – это множитель $\frac{(-i)^2}{2!}$, т.к. у нас реакция во втором порядке ТВ (два узла).

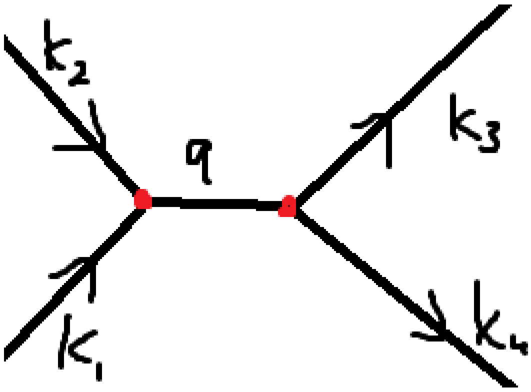
Ещё нам потребуется так называемый пропагатор пиона

$$G(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{\boldsymbol{q^2} - m^2}$$

Он есть для всех частиц. Вот, например, пропагатор любого из лептонов

$$G(\boldsymbol{q}) = \frac{\boldsymbol{\gamma p} + Im}{\boldsymbol{q^2} - m^2}$$

I - единичная матрица.
Пропагатор традиционно пишут в импульсном представлении (да так и удобно). Какой у него физический смысл? Не морочьте себе ПОКА голову ☺



Первая возможная ситуация:
Считаем среднее:

$$< \boldsymbol{q}\left|\widehat{c_q^+}\widehat{c_{k_1}}\widehat{c_{k_2}}\right|\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2} > = e^{i\boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2})}б(\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{q})$$

$$< \boldsymbol{k_3}, \boldsymbol{k_4}\left|\widehat{c_{k_3}^+}\widehat{c_{k_4}^+}\widehat{c_q}\right|\boldsymbol{k_3} > = e^{i\boldsymbol{x_2}(\boldsymbol{k_3}+\boldsymbol{k_4}-\boldsymbol{q})}б(\boldsymbol{k_3} + \boldsymbol{k_4} - \boldsymbol{q})$$

$$S_{fi} = < f\left|S^{(2)}\right|i >$$
$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{g}{3!}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^9}\frac{1}{\sqrt{2E_{k_1}}\sqrt{2E_{k_2}}\sqrt{2E_{k_3}}\sqrt{2E_{k_4}}}\int\iiint d^4\boldsymbol{x_1}\int\iiint d^4\boldsymbol{x_2}\int\iiint d^4\boldsymbol{q}$$
$$* e^{i\boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2})}e^{i\boldsymbol{x_2}(\boldsymbol{k_4}+\boldsymbol{k_3}-\boldsymbol{q})}\frac{1}{\boldsymbol{q^2} - m^2}$$

где $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ - места в пространстве-времени, где произошло взаимодействие.
Пользуясь важным интегралом:

$$\int\iiint d^4\boldsymbol{x}\, e^{i\boldsymbol{xk}} = (2\pi)^4 б^4(\boldsymbol{k})$$

Он настолько важный, что я даже его выделил красным.

Так вот, пользуясь им, берём интегралы:

$$\int\iiint d^4\boldsymbol{x_1}\, e^{i\boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2})} = б^4(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{q})$$

$$\int\iiint d^4\boldsymbol{x_2}\, e^{i\boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k_3}-\boldsymbol{k_4})} = б^4(\boldsymbol{k_3}+\boldsymbol{k_4}-\boldsymbol{q})$$

Подставляем

$$S_{fi} =< f\left|S^{(2)}\right|i >$$
$$= \frac{g^2}{36}\frac{1}{(2\pi)^9}\int\iiint d^4\boldsymbol{q} * (2\pi)^4 б^4(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{q})(2\pi)^4 б^4(\boldsymbol{k_3}+\boldsymbol{k_4}-\boldsymbol{q})$$
$$* \frac{1}{\boldsymbol{q^2} - m^2}$$

Прежде чем продолжить, замечу, что нас вылезли дельта-функции, являющие собой ЗС 4-импульса. Разве не чудо? ☺ Изначально у нас его не был, он вылез САМ! На самом деле благодарность нужно высказать теорфизикам, изначально написавшим такое хорошее пионное поле.

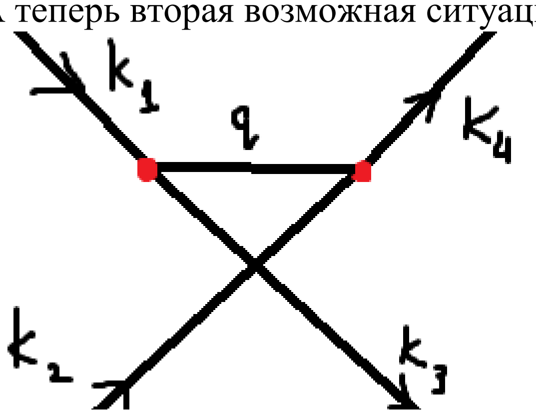
Ну а мы продолжаем, нам надо ещё по **q** проинтегрировать. Делаем это:

$$S_{fi} =< f\left|S^{(2)}\right|i >= \frac{g^2}{72\pi} б^4(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k_3}-\boldsymbol{k_4})$$

$$M_{fi} = \frac{g^2}{72\pi}\frac{1}{s-m^2}$$

Обратите внимание, что у Никитина два матричных элемента. Один – S-матричный элемент, $S_{fi} =< f\left|S^{(2)}\right|i >$. А другой – M-матричный, который он обозначает как iM_{fi} (мнима единица не важна, для сечения нам будет нужен квадрат модуля). Это тот же S-матричный, но без фигни: нефизичных корней $\frac{1}{\sqrt{2E_{k1}}\sqrt{2E_{k2}}\sqrt{2E_{k3}}\sqrt{2E_{k4}}}$ и дельта-функции $б^4(\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k_3}-\boldsymbol{k_4})$**.** В M-матричном элементе осталось лишь самое важное!

А теперь вторая возможная ситуация:

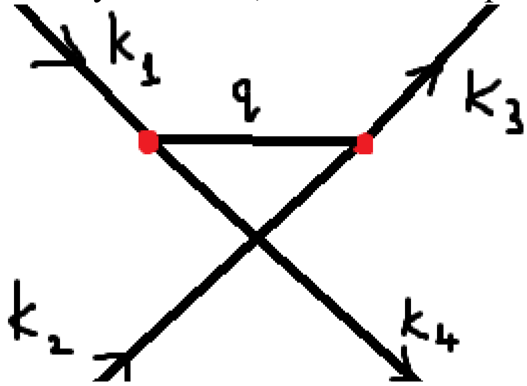


$$S_{fi} =< f|S^{(2)}|i >$$
$$= \frac{g^2}{72\pi} \int \iiint d^4\boldsymbol{x_1} \int \iiint d^4\boldsymbol{x_2} \int \iiint d^4\boldsymbol{q} * e^{ix_1(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_3})} e^{ix_2(\boldsymbol{k_2}+\boldsymbol{k_4}-\boldsymbol{q})}$$
$$* \frac{1}{\boldsymbol{q^2} - m^2}$$
$$= \frac{g^2}{72\pi} \int \iiint d^4\boldsymbol{q} * б^4(\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_3} - \boldsymbol{q}) б^4(\boldsymbol{k_2} + \boldsymbol{k_4} - \boldsymbol{q}) * \frac{1}{\boldsymbol{q^2} - m^2}$$
$$= \frac{g^2}{72\pi} * \frac{1}{t - m^2} б^4(\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2} - \boldsymbol{k_3} - \boldsymbol{k_4})$$

Получаем, что из такой диаграммы Фейнмана

$$M_{fi} = \frac{g^2}{72\pi} \frac{1}{t - m^2}$$

И вы удивитесь, но есть ещё третья диаграмма Фейнмана!



Полагаю, вас не удивит, что там получается то же самое, но с u вместо t:

$$M_{fi} = \frac{g^2}{72\pi} \frac{1}{u - m^2}$$

Суммарный M-матричный элемент

$$M_{fi}(s,t,u) = \frac{g^2}{72\pi}\left(\frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{t - m^2} + \frac{1}{u - m^2}\right)$$

Шаг 2: подсчёт сечения через M-матричный элемент

Воспользуемся готовыми формулами:

$$d\sigma(s,t) = \frac{|M_{fi}(s,t)|^2}{64\pi((s - m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 m_2^2} dt$$

$$\sigma(s) = \int_{t_{мин}}^{t_{макс}} \frac{d\sigma(s,t)}{dt} dt$$

$$t_{мин} = m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s}\left(\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) + m_1^2}\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2) + m_3^2} + \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}\right)$$
$$t_{макс} = m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s}\left(\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) + m_1^2}\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2) + m_3^2} - \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}\right)$$
$$\lambda(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$$

Заметьте, что окончательный ответ – сечение – должен зависит только от начальных условий. Глядя на переменные Мандельстама

$$s=(p_{1i}+p_{2i})^2=(p_{1f}+p_{2f})^2,$$
$$t=(p_{1f}-p_{1i})^2=(p_{2i}-p_{2f})^2,$$
$$u=(p_{2f}-p_{1i})^2=(p_{2i}-p_{1f})^2.$$

мы понимаем, что только s может быть в ответе, потому что только её можно выразить через начальные 4-импульсы без конечных. И действительно, сечение записывается именно через s. Например,

$$\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}(s)=\frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s}$$

Хорошо, а у нас $M_{fi}(s,t,u)=\frac{g^2}{72\pi}\left(\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{u-m^2}\right)$ является функцией 3 переменных Мандельстама:

$$d\sigma(s,t,u)=\frac{\frac{g^2}{72\pi}\left|\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{u-m^2}\right|^2}{64\pi((s-2m^2)^2-m^4}du$$

От одной из них сразу можно избавиться благодаря $s+t+u=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2$. Лучше избавляться от u. А вот от другой – t. избавляться придётся крайне мучительно.

$$d\sigma(s,t)=\frac{\frac{g^2}{72\pi}\left|\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{4m^2-s-t-m^2}\right|^2}{64\pi(s-2m^2)^2-m^4}dt$$
$$=\frac{g^2}{72\pi*64\pi}\frac{\left|\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{3m^2-s-t}\right|^2}{(s-2m^2)^2-m^4}$$

И ответ запишется как

$$\sigma(s)=\frac{g^2}{72*64\pi^2}\frac{1}{(s-2m^2)^2-m^4}\int_{t_{min}}^{t_{max}}\left|\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{3m^2-s-t}\right|^2dt$$

Где

$$t_{\text{мин}}=m_1^2+m_3^2-\frac{1}{2s}\left(\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)+m_1^2}\sqrt{\lambda(s,m_3^2,m_4^2)+m_3^2}+\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$
$$t_{\text{макс}}=m_1^2+m_3^2-\frac{1}{2s}\left(\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)+m_1^2}\sqrt{\lambda(s,m_3^2,m_4^2)+m_3^2}-\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$

И все массы равны m. Тогда простыми подстановками показывается

$$t_{\text{мин}}=4m^2-s$$
$$t_{\text{макс}}=0$$

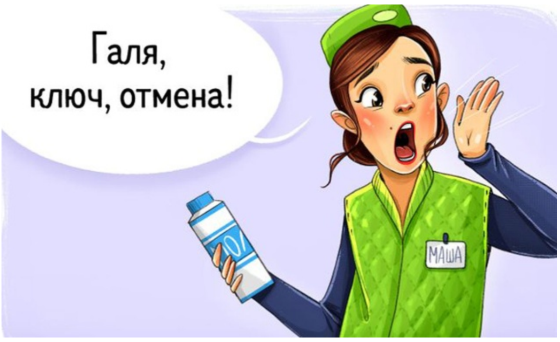
$$\sigma(s) = \frac{g^2}{72 * 64\pi^2} \frac{1}{(s-2m^2)^2 - m^4} \int_{4m^2-s}^{0} \left| \frac{1}{s-m^2} + \frac{1}{t-m^2} + \frac{1}{3m^2-s-t} \right|^2 dt$$

Ответ некрасивый, но что ж поделать.

3. Где можно накосячить?

Во-первых, ещё раз про $\sqrt{2E_k}$. Давайте вернём его в пионное поле и повторим выкладки. Посмотрим, что получится.

А я вам скажу – от первой вершины вылезет $\frac{1}{\sqrt{2E_{k1}}\sqrt{2E_{k2}}\sqrt{2E_q}}$, а от второй - $\frac{1}{\sqrt{2E_q}\sqrt{2E_{k3}}\sqrt{2E_{k4}}}$. Перемножая, получим $\frac{1}{\sqrt{2E_{k1}}\sqrt{2E_{k2}}\sqrt{2E_{k3}}\sqrt{2E_{k4}}} * \frac{1}{2E_q}$. Ну, множитель $\frac{1}{\sqrt{2E_{k1}}\sqrt{2E_{k2}}\sqrt{2E_{k3}}\sqrt{2E_{k4}}}$ останется в S-матричном элементе, не пойдя в M-матричный, а вот $\frac{1}{2E_q}$… получается, мы должны интегрировать по q не просто пропагатор, а пропагатор, умноженный на $\frac{1}{2E_q}$? Ой, всё, решение неверное, надо будет переделывать.



Да верное оно, верное, Никитин подтвердил. Просто его дальнейшие умные формулы уже учитывают как-то множитель $\frac{1}{2E_q}$. Так что с этого момента забивать на $\frac{1}{\sqrt{2E_k}}$ вы можете официально ☺

Во-вторых, второе место, где читатель наверняка будет косячить, это вот это:

$$\int\iiint d^4\boldsymbol{x}\, e^{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{k}} = (2\pi)^4 \text{б}^4(\boldsymbol{k})$$

Читатель наверняка будет писать вот так вот:

$$\int\iiint d^4\boldsymbol{x}\, e^{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{k}} = \text{б}^4(\boldsymbol{k})$$

Теряя $(2\pi)^4$. Цитата Никитина:

> Мой учитель, Мартиросян, последний любимый ученик Ландау, говорил: «В КЭДе что самое сложное? Вся теория? Нет, самое сложное – не потерять коэф!» Мы тогда смеялись – мол, коэф простой, а теория сложная. Но практика показала, что он был прав.

В-третьих, вот эта вот двойка $\frac{(-i)^2}{2}$, потому что мы работаем во втором порядке ТВ.